UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR **Trimestre: Ene-Mar 2010**
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS PURAS Y APLICADAS
MATEMÁTICA I (MA-1111)
Fecha de publicación: 02 de febrero de 2010.

Contenido para el parcial: II

PRÁCTICA DE LAS SEMANAS 5 Y 6

Contenidos

- Definición de límite.
- Límites laterales.
- Teoremas y cálculo de límites finitos (funciones polinómicas y racionales)
- Teorema del emparedado.
- Límites trigonométricos.
- Límites infinitos.
- Límites en el infinito.

Ejercicios a resolver en la práctica

1. Dada $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x+3} & \text{si} \quad x<-3 \\ 1 & \text{si} \quad x=-3 \\ x+3 & \text{si} \quad -3<x<0 \\ 2+\dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$

a) Indica el dominio de la función *f*

b) Grafica la función *f*

c) Calcula a partir de la gráfica: **i**) $\lim\limits_{x\to(-3)^+} f(x)$ **ii**) $\lim\limits_{x\to(-3)^-} f(x)$ **iii**) $\lim\limits_{x\to-3} f(x)$ **iv**) $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$, **v**) $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$, **vi**) $\lim\limits_{x\to0} f(x)$, **vi**) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, **vii**) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Ejercicios tomados del Problemario Cálculo Diferencial e Integral por publicar

2. ¿Cuánto debe valer δ para que $|-2x-6|<\frac{1}{2}$ si $|x+3|<\delta$?

3. Demuestra que $\lim_{x\to 3}(x^2+2)=11$

4. Demuestra que $\lim_{x\to -1}\frac{1}{x+3}=\frac{1}{2}$

5. Calcula los siguientes límites.

a) $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8x^2+20x-16}{x^3-3x^2+4}$ **b)** $\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{x+4}}{x}$ **c)** $\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\sqrt{x^2+a}-\sqrt{a}}$

d) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$ **e)** $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{7+\sqrt{x}}-3}$ **f)** $\lim_{x\to 3^+}\frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}}$

g) $\lim_{x\to -5}\frac{|x+5|}{x+5}$ **h)** $\lim_{x\to -2}\llbracket 2x^2-x\rrbracket$ **i)** $\lim_{x\to -\frac{1}{2}}\llbracket 3x^2-3x\rrbracket$

6. Calcula los límites siguientes:

a. $\lim_{x\to 0}\frac{5x}{\tan(2x)}$ **b)** $\lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}(2x)}{x^3}$ **c)** $\lim_{x\to 4\pi}\frac{\operatorname{sen}^2(x-4\pi)}{x^3-4\pi x^2}$ **d)** $\lim_{x\to 1}\frac{1-x^2}{\operatorname{sen}(\pi x)}$

7. Calcula los siguientes límites.

a) $\lim_{x\to(-2)^-}\frac{x}{4-x^2}$ **b)** $\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{2x^2+5x-3}{(2x-1)^2}$

9. Calcula los siguientes límites.

a) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^7-3}{\sqrt{x+5x^7}}$ **b)** $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-x}}{x}$ **c)** $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5x+3}-x\right)$ **d)** $\lim_{x\to+\infty}\operatorname{sen}x$

9. Demuestra que $\lim_{x\to 0}x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)=0$.

Ejercicios propuestos

Atención: Recuerda que la división entre cero no está definida en el conjunto de los números reales. En caso de obtener una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$, es incorrecto escribir, $\lim_{x\to a} f(x) = \frac{0}{0}$.

Por ejemplo,

En un ejercicio de la forma: " Calcule $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$ ".

Es **incorrecto escribir**: $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4$

La forma correcta de expresarlo es la siguiente:

Como $\lim_{x\to 2}(x^2-4) = 0$ y $\lim_{x\to 2}(x-2) = 0$ se trata de una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$, luego

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4$$

1. Calcula los siguientes límites.

a) $\lim_{x\to -1} \frac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3}$ **b)** $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x^2-3x}$ **c)** $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\frac{1}{2}-\frac{1}{2+x}}$ **d)** $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}$

e) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^4-1}$ **f)** $\lim_{x\to 7} \frac{x^3-5x^2-14x}{x^2-49}$ **g)** $\lim_{x\to -1} \frac{x^3+x^2-x-1}{x^3-x^2-2x}$ **h)** $\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-4}{\sqrt{x-2}}$

i) $\lim_{x\to 2^-} \frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{6-5x+x^2}}$ **j)** $\lim_{x\to 3} \frac{-x^2+9}{\sqrt{x^2+7}-4}$ **k)** $\lim_{x\to 5} \frac{x-3-\sqrt{x-1}}{x^2-25}$ **l)** $\lim_{x\to 64} \frac{\sqrt[3]{x}-4}{\sqrt{x}-8}$

m) $\lim_{x\to 0}\left[\frac{x^2}{\frac{x}{2}-\frac{x}{2+x}}+\sqrt{2}\right]$ **n)** $\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x+5}-\frac{1}{5}}{x}$ **o)** $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$ **p)** $\lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^2}\right]$

2. Sea f la función definida $f(x) = \begin{cases} [\![x]\!] & \text{si} \quad x < 2 \\ \sqrt{x} & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$, calcula, si existe, los límites siguientes. Verifica tus resultados en la gráfica.

a) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ b) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ c) $\lim_{x\to -\sqrt{3}} f(x)$ d) $\lim_{x\to \frac{25}{4}} f(x)$ e) $\lim_{x\to (-4)} f(x)$

3. ¿Tiene sentido estudiar $\lim_{x\to 0^-} \sqrt{x}$? . ¿ Por qué?

4. ¿Para cuáles números reales c existe $\lim_{x\to c} [\![|x|]\!]$?

5. Calcula los siguientes límites.

a) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}(x)$ b) $\lim_{x\to \frac{\pi}{20}} \left(\frac{3}{2} + \cos(5x)\right)$ c) $\lim_{x\to \frac{\pi}{8}} \frac{\tan(2x)}{16x-\pi}$

d) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(9x)}{x^2}$ e) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\operatorname{sen}x}{x-\frac{\pi}{2}}$ f) $\lim_{\theta\to 0} \frac{1-\cos(\theta)}{\operatorname{tg}^2(\theta)}$

g) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\pi\cos(2x)}{\pi-4x}$ h) $\lim_{x\to \pi} \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\pi^2-x^2}$ i) $\lim_{x\to 1} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{1-\sqrt{x}}$

j) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen}x-\cos x}{1-\tan x}$ k) $\lim_{t\to 0}\left[\frac{1-\cos 2t}{\tan^2 t} + \frac{5t^2+5t}{3\operatorname{sen}2t}\right]$ l) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+3\operatorname{sen}x}-\sqrt{1+3\tan x}}{3x^3}$

Atención: Recuerda que la división por cero no está definida en el conjunto de los números reales. Por lo tanto, es incorrecto escribir, para cualquier número real $k \neq 0$.

$$\lim_{x\to a} f(x) = \frac{k}{0}, \quad \lim_{x\to a} f(x) = \frac{k}{0^+} \quad , \quad \lim_{x\to a} f(x) = \frac{k}{0^-}$$

Por ejemplo, en un ejercicio de la forma “ calcula $\lim_{x\to 2^-} \frac{x}{4-x^2}$ ”

Es **incorrecto escribir**: $\lim_{x\to 2^-} \frac{x}{4-x^2} = \frac{2}{0^+} + \infty$

La forma de estudiarlo es la siguiente:

Si $x \to 2^-$ el numerador es positivo mientras que $4-x^2 \to 0^+$ ya que si $0 < x < 2$ entonces $x^2 < 4$, por lo tanto,

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x}{4-x^2} = +\infty \quad \text{ó} \quad \lim_{x\to 2^-} \frac{x}{4-x^2} \to +\infty$$

6. Calcula los límites siguientes.

a) $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+} \dfrac{x-\frac{1}{2}}{4x^2-4x+1}$ **b)** $\lim\limits_{x\to(-1)^+} \dfrac{(x^2+3x+2)(x+3)^2}{(x^2+4x+3)^2}$ **c)** $\lim\limits_{x\to(-1)^-} \dfrac{(x^2+3x+2)(x+3)^2}{(x^2+4x+3)^2}$

Atención: Recuerda que las expresiones $\infty, \quad +\infty, \quad -\infty$ no son números reales. Por lo tanto, es <u>incorrecto operar con ellos como si fueran números reales</u>,

Por ejemplo, en un ejercicio de la forma "Determina el valor de $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2+x}{x}$".

Es **<u>incorrecto escribir</u>**: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2+x}{x} = \dfrac{\infty}{\infty} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{2}{x}+1}{1} = 1$

La forma correcta de expresarlo es la siguiente:

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2+x}{x}$ es una indeterminación de la forma $\dfrac{\infty}{\infty}$, luego

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2+x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2}{x}+1}{1} = 1$$

7. Calcula los límites siguientes.

a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{-9x^4-3x}{\sqrt{5x^4}-2}$ **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{3x^2+3x+2}}{2x^2+5x+3}$ **c)** $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left[\dfrac{2}{3}+\dfrac{709x-5x^6}{x^8+4}\right]$

d) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^5+2x^6-1}}{x^2-4}$ **e)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^3+5x-3}{-3x^2-1}$ **f)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2+3x-1}}{x+2}$

g) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{\dfrac{1+8x^2}{x^2+4}}$ **h)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)$ **i)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+x-1}}{x+\sqrt{x^2+1}}$

Respuestas de los ejercicios propuestos

1) a) $\frac{1}{2}$ **b)** 2 **c)** 4 **d)** 0 **e)** $\frac{3}{4}$ **f)** $\frac{9}{2}$ **g)** 0 **h)** 0 **i)** 2 **j)** -8 **k)** $\frac{3}{40}$ **l)** $\frac{16}{3}$

m) $4+\sqrt{2}$ **n)** $-\frac{1}{25}$ **o)** $\frac{1}{9}$ **p)** $\begin{cases} +\infty & \text{si} \quad x \to 1^+ \\ -\infty & \text{si} \quad x \to 1^- \end{cases}$

2) a) 1 **b)** 0 **c)** -2 **d)** $\frac{5}{2}$ **e)** no existe

3) N0, el dominio de la función es $[0,+\infty)$ y por lo tanto no está definida para ningún intervalo de la forma $(0-r,0)$.

4) $c \in R$ y $c \notin Z$.

5) a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **b)** $\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$ **c)** $\frac{1}{\pi}$ **d)** $\frac{81}{2}$ **e)** 0 **f)** $\frac{1}{2}$ **g)** $\frac{\pi}{2}$ **h)** $\frac{1}{4\pi}$ **i)** π **j)** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **k)** $\frac{17}{6}$ **l)** $-\frac{1}{4}$

6) a) $+\infty$ b) $+\infty$ **c)** $-\infty$

7) a) $-\frac{9}{\sqrt{5}}$ **b)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **c)** $\frac{2}{3}$ **d)** $\sqrt[3]{2}$ **e)** $+\infty$ **f)** $\sqrt{2}$ **g)** 2 **h)** 1 **i)** $+\infty$

Halla el error

- Si $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x^3-1} & \text{si } x<-1\\ 2x+1 & \text{si } -1\le x\le 1\\ x^2+2 & \text{si } x>1\end{cases}$ entonces $\lim\limits_{x\to(-1)} f(x)=-1$

- Si $f(x)=\begin{cases}x+1 & \text{si } x<0\\ x^2+1 & \text{si } x>0\end{cases}$ entonces $\lim\limits_{x\to0^+} = \lim\limits_{x\to0^-} =1$

- $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{|x|}=\dfrac{0}{0}$

- $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-25}{x-5}$ no existe.

- $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ para toda función *f*.

- $\lim\limits_{x\to\infty} = \dfrac{x^2+4}{x^3}=\dfrac{\infty}{\infty}=1$

- $\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{5x}{9-x^2}=\dfrac{15}{0}=-\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2+x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x\sqrt{4+\dfrac{1}{x}}$

- $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{4x^2+x}-x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+x}-x\right)\left(\sqrt{4x^2+x}+x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x^2+x\right)=+\infty$

- $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-1}{\sqrt{4x^2+x}-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{2x}{x}-\dfrac{1}{x}}{\dfrac{4x^2}{x}+\dfrac{x}{x}-\dfrac{x}{x}}$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x-2}=\dfrac{\infty}{\infty}=+\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}=\sqrt{1-\dfrac{1}{\infty}}=1$

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)=\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{\infty}\right)=0$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{sen} x=+\infty$

Ejercicios Extras

1. Sea $f(x) = 3x + 4$

   a) Encuentre un número $\delta_0 > 0$ tal que si $0 < |x - 2| < \delta_0$, entonces $|f(x) - 10| < \frac{1}{100}$

   b) Demuestre usando la definición de límite que $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 10$.

2. Pruebe usando la definición de límite que $\lim\limits_{x \to 4} x^2 - 3x + 2 = 6$.

3. Demuestre por definición que $\lim_{x \to 3} (x - 3)^2 = 0$.

4. Pruebe usando la definición de límite que $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x + 2}{x - 1} = \dfrac{5}{2}$.

5. Sean f y g dos funciones tales que

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 3 \text{ y } \lim_{x \to 1} g(x) = -8.$$

   Indicando las propiedades utilizadas, halle el valor de $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{x \to 1} \frac{a f(x)}{f(x) + g(x)} = 3$$

7. Se sabe que la función f satisface que $3x - 3 < f(x) < x^2 - x + 1$ para $x \neq 2$. Encuentre $\lim_{x \to 2} f(x)$.

8. Calcule los siguientes límites en el caso que existan y en caso contrario explique porque no existen.

   a) $\lim\limits_{x \to 0} x^2 [x + 3]$, donde $[x]$ denota la parte entera de x.

   b) $\lim\limits_{x \to 2} \left(7 \operatorname{sen} \left(\dfrac{1}{(x - 2)^2} \right) \right) |x^2 - 4|$

   c) $\lim\limits_{x \to 2\pi} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}$

   d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen}(2x)}{x + \operatorname{sen}(3x)}$

   e) $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{4}} \dfrac{4x + \pi}{\cos(2x)}$

Practica elaborada por la Prof:
Aida Montezuma.
Ampliada por Prof
Antonio Di Teodoro. 2010. (Basada en prácticas anteriores de la USB-Matemáticas)